

# ブラックホール降着流の計算方法

S.Yamada (Tokyo Metropolitan University)  
– History –  
ver 1.0, 2017/04/22, S.Yamada, 1st draft,

## Contents

<b>1</b>	<b>はじめに</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>使い方</b>	<b>2</b>
2.1	ファイルの種類	2
2.2	コンパイル方法	2
2.3	走らせ方	3
2.3.1	定常解	3
2.3.2	時間依存	3
2.4	実行結果	3
2.5	標準降着円盤	3
2.6	ADAF	3
<b>3</b>	<b>コードの概要</b>	<b>3</b>
3.1	コードの流れ	3
3.1.1	SUBROUTINE cnvrbs	3
3.2	コーディングの詳細	4
3.3	配列	4
3.3.1	tauff と taup の違い	4
3.4	注意点	4
3.4.1	大文字と小文字	4
<b>4</b>	<b>基礎方程式</b>	<b>5</b>
4.1	標準降着円盤モデル	5
4.2	高温降着流 ADAF	8
4.3	時間依存の方程式	8
<b>5</b>	<b>コードの詳細</b>	<b>9</b>
5.1	定常解	9
<b>6</b>	<b>参考文献</b>	<b>9</b>

# 1 はじめに

2017年3月27日(月)に、金沢大学附属高校の渡會氏から、降着円盤の計算コードを伝授され、それをまとめたもの。元々は、千葉大学の松元亮治先生から始まった計算コードで、それを色々な方々で引き継いで使われてきた。主には山田の個人的な備忘録の為にまとめるのが目的であるが、誰かの為にもなれば幸いである。

## 2 使い方

### 2.1 ファイルの種類

- `accdisk.f` : メインのプログラム
- `at.job` : インプットのパラメータファイル
- `para.h` : 配列や必要なパラメータを設定しているファイル
- `disk` : コンパイルするためのファイル
- `c0.out` : 時間発展の初期条件のファイル

### 2.2 コンパイル方法

`gcc` の 3 系でコンパイルしないと、コンパイルが通っても、正常に動作しない。`gcc4` 系と `gcc5` 系では正常動作しない。Ubuntu を使うと、`gcc` の 3 系が古くて素直には入らない可能性が高い。Linux であれば、CentOS の 6.7, 6.8 であれば動作が確認できている。`gcc` 3 系の導入は次のように行う。

まず、`fortran` のライブラリを検索する。

```
> yum search fortran
....
===== N/S Matched: fortran =====
compat-libgfortran-41.i686 : Compatibility Fortran 95 runtime library version
                           : 4.1.2
compat-libgfortran-41.x86_64 : Compatibility Fortran 95 runtime library version
                           : 4.1.2
....
compat-gcc-34-g77.x86_64 : Fortran 77 support for compatibility compiler
....
```

ここで、`gcc-34` のライブラリも現れるはず。それを確認したら、

```
> sudo yum install compat-gcc-34-g77.x86_64
```

とすると、インストールされる。そのあとに、

```
> f77 -v
Reading specs from /usr/lib/gcc/x86_64-redhat-linux/3.4.6/specs
Configured with: ../configure --prefix=/usr --mandir=/usr/share/man
--infodir=/usr/share/info --enable-shared --enable-threads=posix
--disable-checking --with-system-zlib --enable-__cxa_atexit
--disable-libunwind-exceptions --enable-languages=c,c++,f77
--disable-libgcj --host=x86_64-redhat-linux
Thread model: posix
gcc version 3.4.6 20060404 (Red Hat 3.4.6-19.el6)
```

と表示されて、バージョンが `gcc version 3.4.6` であれば動作する。

コンパイル方法は、

```
> f77 -o accdisk accdisk.f
```

のように、`f77` で必ずコンパイルする必要がある。

もし、`gfortran` でコンパイルすると、

```

> gfortran -o accdisk accdisk.f
accdisk.f:58.72:

    pause
                                                    1
Warning: Deleted feature: PAUSE statement at (1)
accdisk.f:69.72:

    pause
                                                    1

```

のようなコンパイルのワーニングがでるだけでなく、なぜか segmentation fault を起こして止まる。

## 2.3 走らせ方

### 2.3.1 定常解

at.job の

- $KI = 0$  定常解を解く
- $KR = 0$  標準降着円盤、 $KR = 1$  ADAF

に設定し、走らせる。

quick に結果を見たい場合は、 $IMORE = 0$  にして、標準出力にすると、定常解の結果だけが出力されたファイルが生成。gnuplot で u 2:5 で、半径 vs 温度の絵ができるので確認する。

### 2.3.2 時間依存

$KI = 1$  にして、時間発展をとく。ADAF の場合は、ROUT2 を 50 や 100 にして、その程度から解くようにする。

## 2.4 実行結果

### 2.5 標準降着円盤

### 2.6 ADAF

## 3 コードの概要

### 3.1 コードの流れ

#### 3.1.1 SUBROUTINE cnvrbs

この中で、xkff を用いて、tauff を 2 回計算している。

```

grep -n tau ./accdisk.f | grep write
1552:      write(6,*) "tau1, tauff, taues, xkff", tau, tauff, taues, xkff
1600:      write(6,*) "tau3, tauff, taues, xkff", tau, tauff, taues, xkff

```

のように、プリントアウトをさせると、

```

LIN = 1.83693930435181E+00      R = 2.6912097E+00      IC = 0
tau1, tauff, taues, xkff 23.9289483 8.89031566E-311 23.9289483 1.26320111E-312
J, R, taup, te 1 2.7012097 197.164335 794624.689
tau3, tauff, taues, xkff 129.613409 105.684461 23.9289483 1.50164214
J, R, taup, te 1 2.7012097 197.164335 794624.689

tau1, tauff, taues, xkff 136.4634 111.269821 25.1935788 1.50164214
J, R, taup, te 2 2.7112097 199.16652 811724.998
tau3, tauff, taues, xkff 131.951256 106.757677 25.1935788 1.44074848
J, R, taup, te 2 2.7112097 199.16652 811724.998

```

のように、一番最初は、 $xkff = 8.89031566E-311$  というものすごい小さい数字が入っている。その直後に、圧力と密度から、温度を正しく計算する。2 回目以降は、一つ前の xkff を使って、最初も計算するので、変なことにはならない。最初だけ、初期化されてない変数 xkff を使っているために、変なことが起こる。

## 3.2 コーディングの詳細

### 3.3 配列

変数をいれる配列は、ヘッダーファイル para.h の中に、長さが parameter (jmax=500) で定義されており、

```
parameter (jmax=500)
common /BMESH/ RIN2,ROUT1,ROUT2,X0(jmax),X1(jmax),Y0(2,jmax),JX
common /BPHY0/ W1(jmax,4),W0(jmax,4),U0(jmax,4)
common /optic/ tauabso(jmax),tauo(jmax)
common /shoki/ deini(jmax),vxini(jmax),vpini(jmax),teini(jmax)
common /cauti/ krs(jmax),kes(jmax)
common /coula/ nlmax,nl(jmax)
common /energ/ es1(jmax)
common /fluxr0/ drepsi(jmax),dgepsi(jmax),repsi(jmax),gepsi(jmax)
common /flux1/ tepsi(jmax),dtepsi(jmax)
```

のように、ほとんどの変数が、jmax の長さ分だけ定義されている。実際に確保される変数の長さは、at.job 中の MESH という変数で、これはデフォルトで 200 に設定されている。

fortran で、配列の中身をプリントアウトしたい場合は、

```
write(*,*) x0
```

とすると、全部出力される。

実際に、コンパイルして、x0 の中身を出力すると、

```
end steady to test. x0 =
2000. 1935.0031 1872.11849 1811.27754 1752.41383 1695.46309 1640.36317
1587.0539 1535.47711 1485.57648 1437.29755 1390.5876 1345.39566
1301.67238 1259.37005 1218.44247 1178.84498 1140.53434 1103.46874
.....
2.8012097 2.7912097 2.7812097 2.7712097 2.7612097 2.7512097 2.7412097
2.7312097 2.7212097 2.7112097 2.7012097 2.6912097 0. 0. 0. 0. 0.
0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.
.....
0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.
```

のようになっており、r の大きい数字から配列に保存されており、確保された 500 個の配列要素のうち、200 個 (=MESH 数) まで値が詰まっている。

#### 3.3.1 tauff と taup の違い

```
ratio = TAUFF/taup
print *,"SADMN : TAUES=",TAUES," TAUFF=", TAUFF, " taup=", taup
print *,"SADMN : ratio=", ratio
```

とコメントを入れて、表示させると、

```
.....
SADMN : TAUES= 5.09422324E-09 TAUFF= 5.97688026E-67 taup= 1.11504341E-66
SADMN : ratio= 0.536022202
SADMN : TAUES= 7.71452468E-06 TAUFF= 7.20877975E-48 taup= 1.34486589E-47
SADMN : ratio= 0.536022202
SADMN : TAUES= 0.00187276193 TAUFF= 1.47537411E-33 taup= 2.75244962E-33
SADMN : ratio= 0.536022202
.....
```

となるので、0.536022202 だけの違いなので、どこかで係数が約 2 倍ほど定義が違うだけだと思われる。

## 3.4 注意点

### 3.4.1 大文字と小文字

fortran は、大文字と小文字を区別しないので、ソースコードを調べるときには、grep にオプション i をつけて、

```
grep -i xkff ./accdisk.f
```

としないと、出現している変数を調べきれない。

## 4 基礎方程式

### 4.1 標準降着円盤モデル

標準円盤モデルは、以下の近似および簡単化をしている。

1. 円筒座標系  $(r, \phi, z)$  を用いる
2. 円盤は定常である :  $\partial/\partial t \implies 0$
3. 円盤は軸対称である :  $\partial/\partial \phi \implies 0$
4. 円盤は幾何学的に薄い。  $H \ll r$  :  $(r, z)$  2次元  $\implies (1 + 1)$ 次元化
5. 円盤はケプラー回転 (遠心力 = 重力) する
6. 円盤は光学的に厚い :  $\tau \gg 1$
7. 円盤は黒体放射する
8. 円盤表面単位面積からの単位時間当たりの放射エネルギー量は、放射拡散近似で、

$$F [\text{erg/cm}^{-2}\text{s}^{-1}] = \int (ac/3\kappa\rho)(dT^4/dz)dx \approx 4\sigma T^4/3\tau \quad (1)$$

と書ける。ここで、

- 輻射密度定数  $a = \pi^2 k^4 / 15 c^3 \hbar^3 = 7.57 \times 10^{-15} \text{ erg/cm}^{-3} \text{ K}^{-4}$ ,
- シュテファン-ボルツマン定数  $\sigma = ac/4 = 5.67 \times 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ K}^{-4} \text{ s}^{-1}$

である。

9. 円盤において、粘性加熱率と放射冷却率がバランスする。

まとめると、

- 未知の物理量は 10 個 ( $\rho, \Sigma, H, v_r, c_s, \Omega, P, T, \tau, \nu$ )
- 基本方程式は 10 本
- パラメータは、 $M, \dot{M}, \alpha$  の 3 つ。

で式が閉じて、各物理量が  $r$  の関数として決定できる。

基本方程式は、一見すると複雑に見えるが、圧力と吸収係数を覗いて、掛け算と割り算のみで表現されている。そこで、圧力は、ガス圧  $P_{\text{gas}}$  か輻射圧  $P_{\text{rad}}$ 、free-free による吸収  $\kappa_{\text{abs}}$  か電子散乱  $\kappa_{\text{es}}$  か、それぞれどちらが支配的になるかで場合分けをすると、領域ごとに、すべて掛け算と割り算で表現できる。そうすると、すべての式を対数をとると、掛け算と割り算が、足し算と引き算で表現できて、代数方程式になる。最終的な結果は、次のようになる。

3つの領域に場合分けをする。

- 領域 a :  $P \sim P_{\text{rad}}, \kappa \sim \kappa_{\text{es}}, r < r_{ab}$
- 領域 b :  $P \sim P_{\text{gas}}, \kappa \sim \kappa_{\text{es}}, r_{ab} < r < r_{bc}$
- 領域 c :  $P \sim P_{\text{gas}}, \kappa \sim \kappa_{\text{abs}}, r > r_{bc}$

定数を下記のように定義する。

$$R \equiv r/r_s \quad (2)$$

$$m \equiv M/M_{\text{solar}} \quad (3)$$

$$\dot{m} \equiv \dot{M}/(L_E/c^2) \quad (4)$$

$$f \equiv 1 - \sqrt{3r_s/r} \quad (5)$$

$$r_{ab} \sim 18\alpha^{2/21} m^{2/21} \dot{m}^{16/21} f^{16/21} r_s \quad (6)$$

$$r_{bc} \sim 2500 \dot{m}^{2/3} f^{2/3} r_s \quad (7)$$

Table 1:  $\alpha$  円盤モデルの基本方程式

1. $\rho = \Sigma/2H$	連続の式 (鉛直方向)
2. $\dot{M} = -2\pi r v_r \Sigma$	連続の式 (動径方向)
3. $H = c_s/\Omega$	静水圧平衡 ( $z$ 方向重力=圧力勾配力)
4. $\Omega = \sqrt{GM/r^3}$	ケプラー回転 (動径方向の運動量の式)
5. $\nu\Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi} (1 - \sqrt{\frac{r_*}{r}})$	角運動量保存
6. $\frac{4\sigma T^4}{3\tau} (= F) = \frac{9}{8}\nu\Sigma\Omega^2$	エネルギーバランス
7. $c_s^2 = P/\rho$	音速
8. $P = P_{\text{gas}} + P_{\text{rad}} = \frac{\rho k T}{\mu m_p} + \frac{4\sigma}{3c} T^4$	状態方程式
9. $\tau = (\kappa_{\text{abs}} + \kappa_{\text{es}})\rho H = (\kappa_o \rho T^{-3.5} + \kappa_{\text{es}})\rho H$	光学的厚み
10. $\nu = \frac{2}{3}\alpha c_s H$	$\alpha$ 粘性

Table 2:  $\alpha$  円盤モデルの内縁部の解 (領域 a)

変数	単位
$H = 5.5 \times 10^4 m \dot{m} f$	cm
$\Sigma = 1.0 \times 10^2 \alpha^{-1} \dot{m}^{-1} R^{3/2} f^{-1}$	g cm <sup>-2</sup>
$ v_r  = 7.6 \times 10^8 \alpha \dot{m}^2 R^{-5/2} f$	cm s <sup>-1</sup>
$T = 4.9 \times 10^7 \alpha^{-1/4} m^{-1/4} R^{-3/8}$	K
$\tau_* = 8.4 \times 10^{-3} \alpha^{-17/16} m^{-1/16} \dot{m}^{-2} R^{93/32} f^{-2}$	-

Table 3:  $\alpha$  円盤モデルの中間部の解 (領域 b)

変数	単位
$H = 2.7 \times 10^3 \alpha^{-1/10} m^{9/10} \dot{m}^{1/5} R^{21/20} f^{1/5}$	cm
$\Sigma = 4.3 \times 10^4 \alpha^{-4/5} m^{1/5} \dot{m}^{3/5} R^{-3/5} f^{3/5}$	g cm <sup>-2</sup>
$ v_r  = 1.7 \times 10^6 \alpha^{4/5} m^{-1/5} \dot{m}^{2/5} R^{-2/5} f^{-3/5}$	cm s <sup>-1</sup>
$T = 2.2 \times 10^8 \alpha^{-1/5} m^{-1/5} \dot{m}^{2/5} R^{-9/10} f^{2/5}$	K
$\tau_* = 2.4 \times 10^1 \alpha^{-4/5} m^{1/5} \dot{m}^{1/10} R^{3/20} f^{1/10}$	-

Table 4:  $\alpha$  円盤モデルの外縁部の解 (領域 c)

変数	単位
$H = 1.5 \times 10^3 \alpha^{-1/10} m^{9/10} \dot{m}^{3/20} R^{9/8} f^{3/20}$	cm
$\Sigma = 1.4 \times 10^5 \alpha^{-4/5} m^{1/5} \dot{m}^{7/10} R^{-3/4} f^{7/10}$	g cm <sup>-2</sup>
$ v_r  = 5.4 \times 10^5 \alpha^{4/5} m^{-1/5} \dot{m}^{3/10} R^{-1/4} f^{-7/10}$	cm s <sup>-1</sup>
$T = 6.9 \times 10^7 \alpha^{-1/5} m^{-1/5} \dot{m}^{3/10} R^{-3/4} f^{3/10}$	K
$\tau_* = 7.9 \times 10^1 \alpha^{-4/5} m^{1/5} \dot{m}^{1/5} f^{1/5}$	–

## 4.2 高温降着流 ADAF

ADAF モデルは、以下の近似および簡単化をしている。

1. 円筒座標系  $(r, \phi, z)$  を用いる
2. 円盤は定常である :  $\partial/\partial t \implies 0$
3. 円盤は軸対称である :  $\partial/\partial \phi \implies 0$
4. 円盤は幾何学的にやや厚めである。  $H < r$  :  $(r, z)$  2次元  $\implies (1 + 1)$  次元化
5. 円盤は非ケプラー回転 (遠心力 < 重力) する
6. 円盤は光学的に薄い :  $\tau < 1$
7. 円盤は熱制動放射や逆コンプトン散乱, シンクロトロン放射で光る。
8. 円盤において、粘性加熱率と移流冷却率がバランスする。

まとめると、

- 未知の物理量は 10 個 ( $\rho, \Sigma, H, v_r, c_s, \Omega, P, T, \tau, \nu$ )
- 基本方程式は 10 本
- パラメータは、 $M, \dot{M}, \alpha, l_{in}$  の 4 つ。(アウトフローがある場合はさらに  $r_{disk}$  と  $p$  が加わる)

ここで、 $l_{in}$  は、ブラックホールに吸い込まれるガスのもつ、単位質量当たりの角運動量を表す。標準円盤との大きな違いは、運動方程式 (4) とエネルギー方程式 (6) に現れる。ともに、微分を含んでいることが解析を困難にし、数值的に解く必要がある。適当な境界条件を与えると、微分方程式が解けて、密度や温度などの物理量が  $r$  の関数として決定できる。

Table 5: ADAF モデルの基本方程式

1. $\rho = \Sigma/2H$	連続の式 (鉛直方向)
2. $\dot{M} = -2\pi r v_r \Sigma = \dot{M}_{input} (r/r_{disk})^p$	連続の式 (動径方向)
3. $H = c_s/\Omega$	静水圧平衡 ( $z$ 方向重力=圧力勾配力)
4. $v_r \frac{dv_r}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} + r(\Omega^2 - GM/r^3)$	動径方向運動量
5. $\nu \Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left(1 - \sqrt{\frac{l_{in}}{\sqrt{GM}r}}\right)$	角運動量保存
6. $\frac{1}{2} v_r \Sigma T \frac{ds(\rho, T)}{dr} = \frac{9}{8} \nu \Sigma \Omega^2 - F(\rho, T)$	エネルギー保存
7. $c_s^2 = P/\rho$	音速
8. $P = P_{gas} = \frac{\rho k T}{\mu m_p}$	状態方程式
9. $\tau = (\kappa_{abs} + \kappa_{es}) \rho H = (\kappa_o \rho T^{-3.5} + \kappa_{es}) \rho H$	光学的厚み
10. $\nu = \frac{2}{3} \alpha c_s H$	$\alpha$ 粘性

ここで、 $F(\rho, T)$  は、放射冷却率のことである。

## 4.3 時間依存の方程式

# 5 コードの詳細

## 5.1 定常解

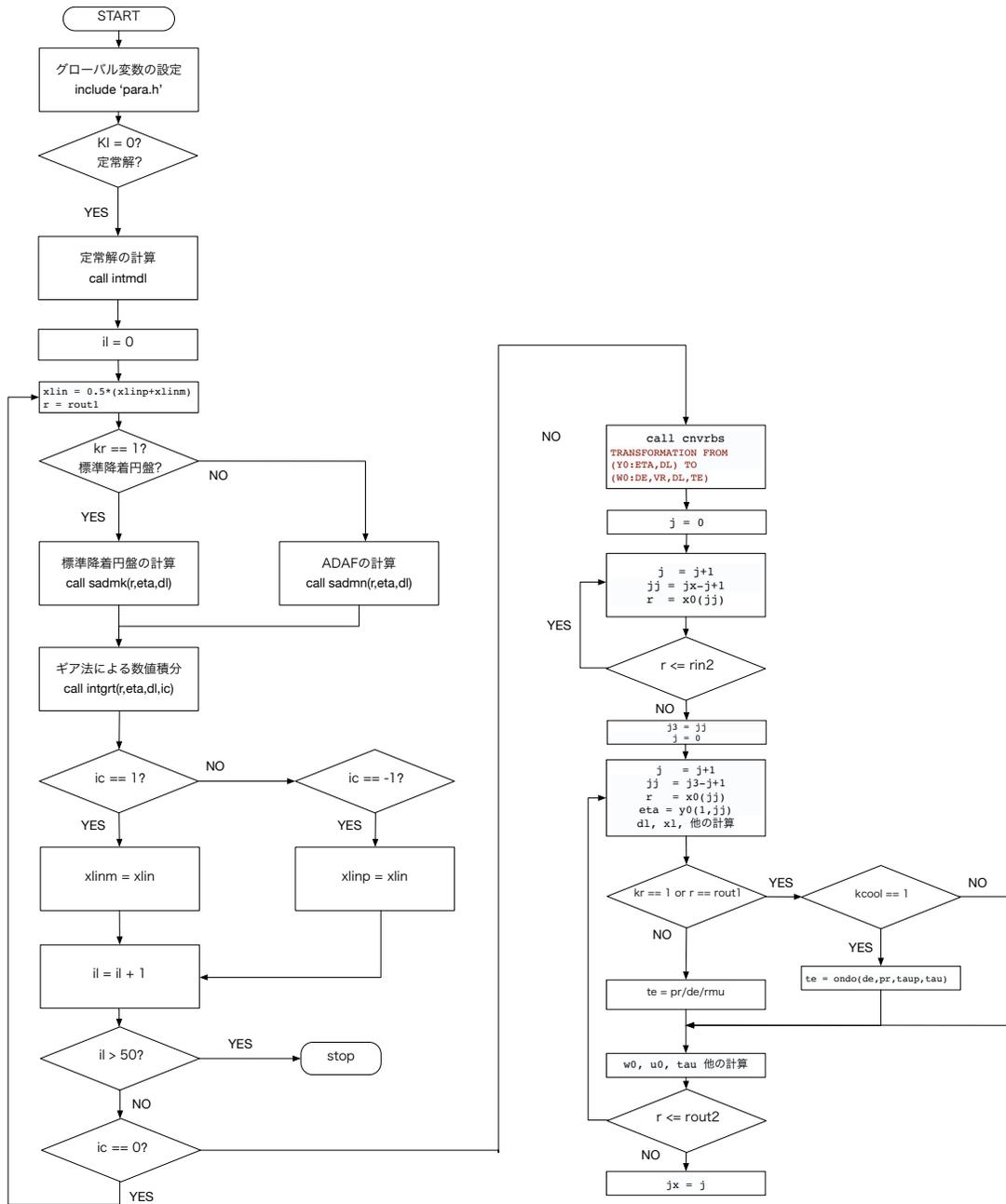


Figure 1: 定常部分のコードのフローチャート

## 6 参考文献

定常解に関しては、

- ブラックホール天文学 (新天文学ライブラリー), 嶺重 慎  
の記述に沿ってまとめた。